Leçon 229 : Fonctions monotones, fonctions convexes. Exemples et applications

I) Fonctions monotones

a) Définition et régularité

Déf 1 : Soit $D \subset \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une application.

- f est dite croissante (resp. strictement croissante) si et seulement si :
$\forall (x,y) \in D^2$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
(resp. $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$)
- f est dite décroissante si $-f$ est croissante (resp. strictement) (resp. strictement)
- f est dite monotone (resp. strictement) si et seulement si f est (strictement) croissante ou décroissante.

Thm 2 : (Théorème de la limite monotone) Soit $D \subset \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ monotone. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que a soit adhérent à $D \cap]a; +\infty[$ (resp $D \cap]-\infty; a[$). Alors f admet une limite, éventuellement infinie, à droite (resp. à gauche) au point a.

Thm 3 : Soit f une application monotone d'un intervalle I réel dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des points de discontinuité est au plus dénombrable.

Thm 4 : Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ monotone. On a f continue sur $I \Leftrightarrow f(I)$ est un intervalle.

Thm 5 : Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable à droite sur $\mathring{I}$. On a
i) f constante $\Leftrightarrow \forall t \in \mathring{I}$ $f'_d(t) = 0$
ii) f croissante $\Leftrightarrow \forall t \in \mathring{I}$ $f'_d(t) \geq 0$
iii) f décroissante $\Leftrightarrow \forall t \in \mathring{I}$ $f'_d(t) \leq 0$

Exemple 6 : - exp est croissante sur $\mathbb{R}$
- $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^*$

b) Suite de fonctions monotones

Thm 7 : (Deuxième théorème de Dini)
Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes réelles, continues et définies sur un segment $I = [a;b]$ de $\mathbb{R}$. Si (f_n) converge simplement vers une fonction f continue sur I, f est croissante et la convergence est uniforme.

Remarque 8 : On peut remplacer l'hypothèse de croissance par une hypothèse de décroissance

(contre-) Exemple 9 : si $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ pour tout n
$(f_n)_{n \geq 0}$ CV mais pas uniformément sur $[0;1]$

II) Fonctions convexes

a) Généralités

Déf 10 : Soit f une fonction numérique définie sur une partie convexe D d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On dit que f est convexe si et seulement si
$\forall (x,y) \in D^2$, $\forall t \in [0;1]$ $f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$

Remarque 11 : f est dite strictement convexe si l'inégalité précédente est stricte

Déf 12 : f est dite concave si la fonction $-f$ est

b) Convexité des fonctions d'une variable réelle (concave)

Thm 13 : f est convexe si et seulement si son épigraphe ($\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \in D$ et $f(x) \leq y\}$) est convexe. cf annexe 1

Lemme 14 : (Lemme des 3 pentes) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervalle) f est convexe si et seulement si

$$\forall (x,y,z) \in I^3,\ (x<y<z) \Rightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$. cf annexe 2

Thm 15 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Alors f admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche en tout point de $\mathring{I}$, et $f_g'(a) \leq f_d'(a)$. De plus f est continue sur $\mathring{I}$.

Thm 16 : Soit I intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$. Alors f est convexe si et seulement si elle est continue sur I et admet une dérivée à droite croissante.

Corollaire 17 : Soit f une fonction numérique deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I. Alors f est convexe si et seulement si $f'' \geq 0$

Exemple 18 :
- exp est convexe sur $\mathbb{R}$
- cos n'est ni convexe ni concave sur $\mathbb{R}$
- $x \mapsto \frac{1}{x}$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$

Déf 19 : $f : I \to \mathbb{R}_+^*$ est logarithmiquement convexe (ou log-convexe) si la fonction $\ln(f)$ est convexe sur I.

Prop 20 : Une fonction log-convexe est convexe.

Définition 21 : On définit la fonction gamma d'Euler par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

Lemme 22 : La fonction Γ est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x > 0$

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

Thm 23 : (Théorème de Bohr-Mollerup) Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ une solution de l'équation fonctionnelle $f(x+1) = xf(x)$, continûment dérivable et log convexe. Alors, il existe une constante λ telle que $f = \lambda\Gamma$

FIN 1

c) Caractérisation plus générales

Thm 24 : (Jensen) Soit $D \subset E$ (E espace vectoriel normé). Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Alors f est convexe si et seulement si

$$\forall x_1, \dots, x_n \in I,\ \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+,\ \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$$
$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)$$

Thm 25 : Soit f une fonction numérique différentiable sur un ouvert convexe U d'un evn E. Alors f convexe $\Leftrightarrow \forall (a,x) \in U^2,\ f(x) \geq f(a) + df(a).(x-a)$

Thm 26 : Soit f fonction numérique deux fois différentiable sur U ouvert convexe d'un evn E. Alors f est convexe si et seulement si le polynôme $h \mapsto d^2 f(a).h^2$ est positif pour tout $a \in U$.

III) Applications

a) Inégalités classiques de convexité

Prop 27: Une fonction convexe a sa courbe représentative située au-dessus de toutes ses tangentes et toutes en dessous de ses cordes

Exemple 28: $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exp x \geq 1+x$ (et $\ln(1+x) \leq x$)
$\forall x \in \mathbb{R}$ $\sin x \leq x$ cf ammexe 3 et 4

Thm 29: Inégalité arithmético-géométrique : Soit $m \in \mathbb{N}$
$\forall x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}_+$ $(x_1 \dots x_m)^{1/m} \leq \frac{x_1 + \dots + x_m}{m}$

Thm 30: Inégalité de Hölder. Soient $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour tous nombres réels positifs $a_1 \dots a_m$ et $b_1 \dots b_m$ on a $\sum_{i=1}^{m} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{m} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{m} b_i^q\right)^{1/q}$

Thm 31: Inégalité de Minkowsky.
Soient $p \geq 1$ et $x_1, \dots, x_m$; $y_1, \dots, y_m$ réels positifs.
Alors $\left(\sum_{i=1}^{m} (x_i + y_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{m} y_i^p\right)^{1/p}$

Application 32: Soit $p \geq 1$. Notons

$$N : \begin{cases} \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \\ (x_1, \dots, x_m) \mapsto \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p} \end{cases}$$

L'inégalité de Minkowsky entraîne que N est une norme sur $\mathbb{R}^m$.

b) Application à l'optimisation dans un Hilbert

Def 33: Soit X evn et $f : X \to \mathbb{R}$. On dit que f est coercive si $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$

Thm 34: (Théorème de Riesz) Soit H un espace de Hilbert et f une forme linéaire continue sur H. Alors, il existe $a \in H$ tel que $f(x) = \langle x, a \rangle$ pour tout $x \in H$

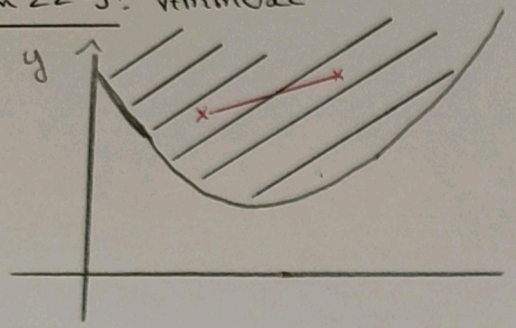
Thm 35: Projection sur un convexe fermé. Soit H espace de Hilbert et C partie convexe fermée non vide de H. Pour tout $x \in H$, il existe un unique point $p_C(x) \in C$ tel que $d(x, C) = d(x, p_C(x))$.
De plus, pour tout $y \in C$,
(*) $\langle x - p_C(x), y - p_C(x) \rangle \leq 0$

Thm 37: Soit H espace de Hilbert et $J : H \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, continue et coercive. Alors, il existe $a \in H$ tel que
$J(a) = \inf_H J$

Thm 36: Soit H un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel de H. Alors $F \oplus F^\perp = H$

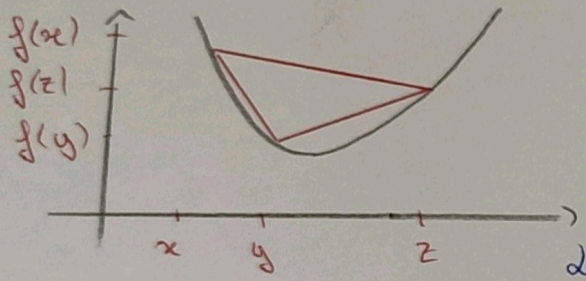
DEV 2

Leçon 229 : Annexe

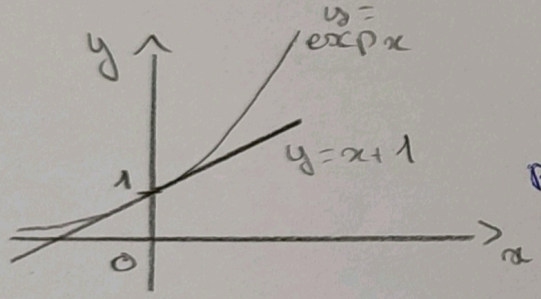


Epigraphe d'une fonction convexe

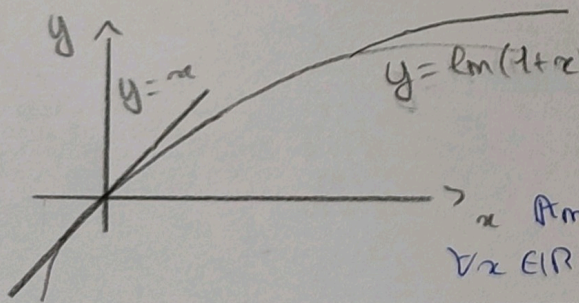
Annexe 1 :
Epigraphe



Annexe 2 :
Lemme des 3 pentes



Annexe 3 :
$\forall x \in \mathbb{R}$ $\exp x \geq x+1$



Annexe 4 :
$\forall x \in]-1, +\infty[$ $\ln(1+x) \leq x$